HORNUNG TAMÁS*

Diszkrét egyenletes közelítés: a lineáris programozás egy alkalmazása

Discrete smooth approximation: an application of linear programming

The best discrete approximation can be written as a linear programming problem to minimize the (weighted) maximum error between the original function and the linear combination of the basis function in a number of particular points. On this basis, we prove the discrete versions of both Chebishev's alternation theorem and Haar's uniqueness theorem of the best approximation if the basis functions are continuous and form Chebyshev system. We present an algorithm to find the best discrete approximation.

Bevezetés

Gyakorlati problémák vizsgálatánál előfordulhat, hogy egy egyváltozós valós függvény értékének mérésére az értelmezési tartomány diszkrét helyein, az alappontokban, több kísérletet végeznek, és a függvényértékeket a mérési eredmények számtani átlagával közelítik. Felmerülhet a kérdés, hogyan becsülhető a függvény bizonyos alapfüggvények lineáris kombinációjával.

Ha az alappontok száma nagyobb az alapfüggvények számánál, akkor általában nem várható, hogy az illesztendő függvény az alappontokban megegyezzék a mérési átlagokkal. Ilyenkor egy lehetséges célkitűzés, hogy a becslő függvény értékei az alappontokban egy adott megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia intervallumon belül legyenek, ha ez lehetséges.

A probléma lineáris programozási feladattal oldható meg: a korlátozó feltételekben kikötjük, hogy az alappontokban az illesztendő függvény eltérése a mérési átlagtól legfeljebb a konfidencia-környezet sugarának μ-szöröse legyen, majd keressük az alapfüggvényeknek azt a lineáris kombinációját, amelyre μ minimális. Ennek a lineáris programozási feladatnak mindig létezik optimális megoldása. Az optimális becslő függvényt legjobb diszkrét közelítésnek nevezzük. Ha a környezetek sugarai egyenlők, akkor legjobb diszkrét egyenletes közelítésről beszélünk. Ha μ minimuma legfeljebb 1, a kívánt közelítést kapjuk, ha 1-nél nagyobb, akkor nem létezik megfelelő becslő függvény.

Felhasználva a lineáris programozási modell sajátos szerkezetét, közvetlenül vizsgálható, hogy egy becslő függvény optimális-e, és ha nem az, hogyan javítható. Dolgozatunkban azzal az esettel foglalkozunk, amikor az alapfüggvények CSEBISEV-féle rendszert alkotnak. Egy m+1 függvényből álló rendszert CSEBISEV-félének nevezünk az $[a,b]$ intervallumban, ha bármely nem triviális lineáris kombinációjának legfeljebb m gyöke van az $[a,b]$ intervallumban. Az ilyen függvény-rendszer lineáris kombinációival egyértelműen előállíthatók az alternáló függvények, amelyek különbsége a mérések átlagától m+2 számú, nagyság sze-

* BGF Pénzügyi és Számviteli Kar Zalaegerszegi Intézete, Módszertani Tanszék, főiskolai docens.

rint rendezett alappontban váltakozva d és $-d$-szerese a megfelelő környezet sugarának valamely d valós számra.

Az előadásban megmutatjuk, hogy minden alternáló függvény egyértelműen meghatározza a duál feladat egy nem degenerált lehetséges bázismegoldását, amelynek célértéke $|d|$. Ebből a dualitási tételek alapján megadható annak feltétele, hogy egy alternáló függvény optimális legyen. Ha egy alternáló függvény nem a legjobb diszkrét közelítés, akkor algoritmust adunk a javításra, amellyel véges sok lépésben megkapjuk az optimális megoldást. Így adódik egyrészt CSEBISEV alternálási tételének diszkrét változata: az alapfüggvények lineáris kombinációja akkor és csak akkor a legjobb diszkrét egyenletes közelítés, ha olyan alternáló függvény, amelynek hibája az összes alappontban kisebb vagy egyenlő a megfelelő környezet sugarának $|d|$-szeresénél. Másrészt következik HAAR ALFRÉD tétele diszkrét változatának egyik felét: CSEBISEV-féle rendszer esetén a legjobb diszkrét közelítés egyértelmű.

A legjobb egyenletes közelítés folytonos változata megtalálható pl. az [1], [5], [6], [7] irodalomban. A legjobb diszkrét egyenletes közelítés lineáris programozási modellje szerepel [1]-ben, a legjobb diszkrét közelítést adó lineáris függvény előállítása [3]-ban, a legjobb diszkrét közelítést adó polinom előállítása [4]-ben. HAAR tétele megtalálható pl. [2]-ben és [7]-ben.

A legjobb diszkrét közelítés és LP modellje

Legyen adva az $[a,b]$ intervallumban értelmezett f valós függvény értéke az $x_0 < x_1 \ldots < x_n$ *alappontokban* ($n \in \mathbf{N}$, $a \le x_0$, $x_n \le b$):

$$f_i = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

és legyenek adva az $r_i > 0$ számok minden $i = 0, 1, \ldots, n$-re.

Az f függvényt az $[a,b]$-n értelmezett $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ ($m \in \mathbf{N}$) *alapfüggvények*

$$\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m \quad (c_0, c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{R})$$

lineáris kombinációjával közelítjük. A *közelítés mértékén* azt a legkisebb μ számot értjük, amelyre tetszőleges x_i alappontban $\varphi(x_i)$ távolsága f_i-től legfeljebb $r_i\mu$, azaz

$$|f_i - \varphi(x_i)| \le r_i\mu \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Az $r_i > 0$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) feltétel miatt a közelítés mértéke nyilván

$$\max\left\{ \frac{1}{r_i}\left|f_i - \varphi(x_i)\right| \,\middle|\, i = 0,1,\ldots,n \right\},$$

vagyis az adott függvényértékektől mért súlyozott eltérések maximuma.

Legjobb diszkrét közelítésnek (ha létezik) az alapfüggvényeknek azt a lineáris kombinációját nevezzük, amelyre a közelítés mértéke az összes lineáris kombináció közül a legkisebb. Ha $r_0 = r_1 = \ldots = r_n > 0$, akkor az adott függvényértékektől mért legnagyobb eltérést minimalizáljuk, ezért *legjobb diszkrét egyenletes közelítésről* beszélünk. Általában azonban az alappontokban az $r_i > 0$ értékek lehetnek különbözők is, mint például a bevezetésben említett problémánál. Ha pedig minden $f_i > 0$ és $r_i = 1/f_i$, akkor a legnagyobb relatív hibát minimalizáljuk.

A legjobb diszkrét közelítés megadható lineáris programozási feladattal is. A modellben a $c_0, c_1, ..., c_m$ előjelkorlát nélküli és a μ nem negatív változók szerepelnek, a feltételek és célfüggvény a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{array}{c} \varphi_0(x_i)c_0+\varphi_1(x_i)c_1+...+\varphi_m(x_i)c_m+r_i\mu \geq f_i \quad (i=0,1,...n) \\ \varphi_0(x_i)c_0+\varphi_1(x_i)c_1+...+\varphi_m(x_i)c_m-r_i\mu \leq f_i \quad (i=0,1,...n) \\ \underline{c_0, c_1, ..., c_m \in \mathbf{R}, \quad \mu \geq 0} \\ \mu \to \min \end{array}$$

Vezessük be a következő jelöléseket! Tetszőleges $a \leq u_0 < u_1 < ... < u_k \leq b$ $(k \in \mathbf{N})$, $U = \{u_0, u_1, ..., u_k\}$ esetén

$$\underline{\mathbf{\Phi}}_U = \begin{bmatrix} \varphi_0(u_0)\,\varphi_1(u_0)...\varphi_m(u_0) \\ \varphi_0(u_1)\,\varphi_1(u_1)...\varphi_m(u_1) \\ \vdots \quad \vdots \quad ... \quad \vdots \\ \varphi_0(u_k)\,\varphi_1(u_k)...\varphi_m(u_k) \end{bmatrix}$$

Ha U az alappontok halmaza, akkor $\underline{\mathbf{\Phi}}_U$ helyett röviden $\underline{\mathbf{\Phi}}$-t írunk. Legyen továbbá

$$\underline{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}.$$

Ekkor a lineáris programozási modell a következő alakban írható:

$$\begin{array}{c} \underline{\mathbf{\Phi}}\,\underline{\mathbf{c}}+\underline{\mathbf{r}}\,\mu \geq \underline{\mathbf{f}} \\ \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}\,\underline{\mathbf{c}}-\underline{\mathbf{r}}\,\mu \leq \underline{\mathbf{f}} \quad \mu \geq 0} \\ \mu \to \min \end{array} \tag{1}$$

A feladatnak nyilván van lehetséges megoldása pl.

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \mu = \max\left\{ \frac{1}{r_i}|f_i| \,\middle|\, i = 0,1,...,n \right\},$$

továbbá célfüggvénye alulról korlátos, azért igaz a következő:

1. tétel. Az (1) feladatnak létezik optimális megoldása, azaz tetszőleges $x_0, x_1, ..., x_n$ alappontok ($n \in \mathbf{N}$, $a \leq x_0$, $x_n \leq b$), $f_0, f_1, ..., f_n$ függvényértékek és $r_0, r_1, ..., r_n$ pozitív számok esetén létezik legjobb diszkrét közelítés.

CSEBISEV-féle függvényrendszer

Az (1) feladat sajátos szerkezetét felhasználva lehetőség nyílik a legjobb diszkrét közelítés meghatározására anélkül, hogy az (1) feladatot megoldanánk. A dolgozatban azzal az esettel foglalkozunk, amikor az alapfüggvények CSEBISEV-féle rendszert alkotnak.

Definíció. Az $[a,b]$ intervallumban értelmezett φ_0, φ_1, …, φ_m ($m\in\mathbf{N}$) függvények *CSEBISEV-féle* rendszert alkotnak $[a,b]$-ben, ha bármely nem triviális lineáris kombinációjuknak legfeljebb m gyöke van $[a,b]$-ben.

Például a $\varphi_j(x) = x^j$ ($j = 0; 1; ...; m$) függvények CSEBISEV-féle rendszert alkotnak tetszőleges intervallumon, hiszen minden legfeljebb m-edfokú polinomnak legfeljebb m gyöke van.

Jegyezzük meg, hogy ha egy függvényrendszer CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, akkor lineárisan független is $[a,b]$-ben, fordítva azonban általában nem igaz. A CSEBISEV-féle rendszer jellemzésére ismert a következő:

2. lemma. A φ_0, φ_1, …, φ_m függvényrendszer akkor és csak akkor CSEBISEV-féle az $[a,b]$ intervallumban, ha az $[a,b]$ intervallum minden m+1 elemű X részhalmazára $|\underline{\mathbf{\Phi}}_X| \neq 0$.

Bizonyítás. Legyen X az $[a,b]$ intervallum m+1 elemű részhalmaza. $|\underline{\mathbf{\Phi}}_X| = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{\mathbf{\Phi}}_X$ oszlopvektorai lineárisan összefüggők. Léteznek tehát olyan c_0, c_1, ..., $c_m \in \mathbf{R}$ számok, amelyek között van 0-tól különböző, és $c_0\varphi_0(x_i) + c_1\varphi_1(x_i) + ... + c_m\varphi_m(x_i) = 0$ minden $i = 0, 1, ..., m$ esetén, vagyis a $c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + ... + c_m\varphi_m$ nem triviális lineáris kombinációnak az X halmaz minden eleme gyöke.

φ_0, φ_1, …, φ_m tehát pontosan akkor nem CSEBISEV-féle, ha van az $[a,b]$ intervallumnak olyan m+1 elemű X részhalmaza, amelyre $|\underline{\mathbf{\Phi}}_X| = 0$.

Szükség lesz az 1. lemma folytonos függvényekre vonatkozó következő élesítésére.

3. lemma. Legyen φ_0, φ_1, …, φ_m folytonos az $[a,b]$ intervallumban. Ekkor φ_0, φ_1, …, φ_m akkor és csak akkor CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, ha $[a,b]$ minden m+1 elemű X részhalmazára $|\underline{\mathbf{\Phi}}_X|$ ugyanolyan előjelű.

Bizonyítás. Az elegendőség következik a 2. lemmából. A szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy φ_0, φ_1, ..., φ_m CSEBISEV-féle rendszert alkot $[a,b]$-ben. Legyen $X = \{x_0, x_1, ..., x_m\}$, $a \le x_0 < x_1 < ... < x_m \le b$. Tetszőleges $x \in [a;x_1[$ esetén legyen $X_0 = \{x, x_1, ..., x_m\}$, és $\varphi(x) = |\underline{\mathbf{\Phi}}_{X_0}|$.

$|\underline{\mathbf{\Phi}}_{X_0}|$ első sor szerinti kifejtéséből következik, hogy φ lineáris kombinációja φ_0, φ_1, ..., φ_m-nek, így φ folytonos. A 2. lemma szerint φ-nek nincs zérushelye $[a;x_1[$-ben, tehát folytonossága miatt nem válthat előjelet.

Hasonló igaz x_0 helyett x_1 ,..., x_m-re. Ebből pedig következik, hogy az x_0, x_1, ..., x_m pontok tetszőleges megválasztására $|\underline{\mathbf{\Phi}}_X|$ ugyanolyan előjelű.

Legjobb diszkrét közelítés CSEBISEV-féle alaprendszerrel

Foglalkozzunk először azzal az esettel, amikor az alapfüggvények száma megegyezik az alappontok számával, vagyis $m = n$. Így az alappontokból álló X halmazra $\underline{\mathbf{\Phi}}_X = \underline{\mathbf{\Phi}}$. Helyettesítsünk az (1) feladatban $\mu = 0$-t. Ekkor a modell feltételei:

$$\underline{\mathbf{\Phi}}_X\,\underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{r}}\,0 \ge \underline{\mathbf{f}}$$

$$\underline{\mathbf{\Phi}}_X\,\underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{r}}\,0 \le \underline{\mathbf{f}}$$

Ha a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ függvényrendszer CSEBISEV-féle az $[a,b]$ intervallumban, akkor a 2. lemma szerint $\underline{\mathbf{\Phi}}_X$-nek létezik inverze. Tehát $\mu = 0$-ra az (1) feladat egyetlen lehetséges megoldása

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{\Phi}}_X^{-1}\underline{\mathbf{f}}, \quad \mu = 0,$$

ami egyben az egyetlen optimális megoldás is.

Ha az alapfüggvények száma nagyobb, mint az alappontok száma, $m > n$, és az alapfüggvények CSEBISEV-féle rendszert alkotnak $[a,b]$-ben, akkor az alappontok halmazát tetszőlegesen választott $m - n$ darab új ponttal kiegészítve a feladatot visszavezethetjük az $m = n$ esetre. Ezért μ minimuma ekkor is 0. Mivel azonban az új alappontokban a függvényértéket bárhogyan választva a közelítés mértéke nem változik, az (1) feladatban végtelen sok optimális megoldást kapunk.

A dolgozat hátralevő részében az $m < n$ esettel foglalkozunk. Meg fogjuk mutatni, hogy a legjobb diszkrét közelítést elegendő az alternáló függvények között keresni.

Definíció. Legyen $X = \left\{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}\right\}$, az alappontok $m+2$ elemű részhalmaza, ahol $0 \le i_0 < i_1 < \ldots < i_m \le n$. A $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ függvények $\varphi_X = c_{X_0}\varphi_0 + c_{X_1}\varphi_1 + \ldots + c_{X_m}\varphi_m$ lineáris kombinációját az X halmazhoz tartozó *alternáló függvénynek* nevezzük, ha van olyan $d_X \in \mathbf{R}$, amelyre

$$\varphi_X\left(x_{i_j}\right) + (-1)^k r_{i_j} d_X = f_{i_j} \quad (j = 0, 1, \ldots, m+1).$$

Ha bevezetjük az

$$\underline{\mathbf{f}}_X = \begin{bmatrix} f_{i_0} \\ f_{i_1} \\ \vdots \\ f_{i_{m+1}} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{s}}_X = \begin{bmatrix} (-1)^0 r_{i_0} \\ (-1)^1 r_{i_1} \\ \vdots \\ (-1)^{m+1} r_{i_{m+1}} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{c}}_X = \begin{bmatrix} c_{X0} \\ c_{X1} \\ \vdots \\ c_{Xm} \end{bmatrix}$$

jelöléseket, akkor φ_X alternáló függvényt meghatározó $m+2$ egyenletből álló, $m+2$ változót tartalmazó egyenletrendszert a

$$[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{c}}_X \\ d_X \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{f}}_X$$

alakban írhatjuk. Igaz a következő:

4. lemma. Legyenek a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ alapfüggvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban. Ha $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, akkor az alappontok tetszőleges $m+2$ elemű X részhalmaza egyértelműen meghatározza a φ_X alternáló függvényt.

Bizonyítás. A 3. lemma szerint $\left|\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X\right|$ utolsó oszlop szerinti kifejtésében minden tag 0-tól különböző, azonos előjelű, így $[\,|\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]$ nem szinguláris. Ebből:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{c}}_X \\ d_X \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]^{-1}\underline{\mathbf{f}}_X \tag{2}$$

Az optimum vizsgálatát az (1) feladat duálja segítségével végezhetjük el. Figyelembe véve, hogy $c_0, c_1, \ldots, c_m$ előjelkorlát nélküli változók és μ nem negatív, a duál feladat a

$$\begin{array}{l} \underline{\mathbf{u}}^*\underline{\mathbf{\Phi}} - \underline{\mathbf{v}}^*\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{0}}^* \\ \underline{\mathbf{u}}^*\underline{\mathbf{r}} + \underline{\mathbf{v}}^*\underline{\mathbf{r}} \le 1 \qquad \underline{\mathbf{u}}^*, \underline{\mathbf{v}}^* \ge \underline{\mathbf{0}}^* \\ \hline \underline{\mathbf{u}}^*\underline{\mathbf{f}} - \underline{\mathbf{v}}^*\underline{\mathbf{f}} \to \max \end{array} \tag{3}$$

módosított normál feladat, ahol $\underline{\mathbf{u}}^* = [u_0, u_1, \ldots, u_m]$ és $\underline{\mathbf{v}}^* = [v_0, v_1, \ldots, v_m]$.

A (3) feladatban bevezetve az $y_i = u_i - v_i$ $(i = 0; 1; \ldots; n)$ változókat, y_i tetszőleges előjelű lehet, továbbá $|y_i| \le u_i + v_i$. Így $\underline{\mathbf{y}} = [y_0, y_1, \ldots, y_n]^*$-re:

$$\begin{array}{l} \underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\mathbf{0}}^* \\ |\underline{\mathbf{y}}|^*\underline{\mathbf{r}} \le 1 \\ \hline \underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{f}} \to \max \end{array} \tag{4}$$

ahol most $|\underline{\mathbf{y}}| = [|y_0|; |y_1|; \ldots; |y_n|]^*$. Ennek a feladatnak a lehetséges megoldásából pedig az

$$u_i = \frac{1}{2}\left(|y_i| + y_i\right), \quad v_i = \frac{1}{2}\left(|y_i| - y_i\right) \tag{5}$$

összefüggésekkel $u_i - v_i = y_i$, $u_i + v_i = |y_i|$ miatt a (3) duál feladat olyan lehetséges megoldása állítható elő, amelynek célfüggvény értéke megegyezik (4) célfüggvény értékével. Így a (3) feladat helyettesíthető a (4) feladattal.

Az alternáló függvények és a duál feladat kapcsolatát mutatja a következő,

5. lemma. Legyenek a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ alapfüggvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban. Ha $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, akkor tetszőleges φ_X alternáló függvény meghatározza a duál feladat egy nem degenerált bázismegoldását, amelynek célértéke $|d_X|$.

Bizonyítás. Legyen $\underline{\boldsymbol{\psi}}^* = [\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n]$ a $[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]^{-1}$ inverz mátrix utolsó sora, vagyis $\underline{\boldsymbol{\psi}}^* = \underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]^{-1}$, ahol $\underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}$ az m+2-edik egységvektor transzponáltja. Legyen $X = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}\}$, ahol $0 \le i_0 < i_1 < \ldots < i_m \le n$. Az $\underline{\mathbf{y}}_X = [y_{X_0}, y_{X_1}, \ldots, y_{X_n}]^*$ vektort a következőképpen értelmezzük:

$$y_{X\,i} = \begin{cases} \psi_k, & \text{ha } i = i_k \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Mivel

$$\left[\underline{\boldsymbol{\psi}}^*\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\boldsymbol{\psi}}^*\underline{\mathbf{s}}_X\right] = \underline{\boldsymbol{\psi}}^*[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X] = \underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]^{-1}[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X] = \underline{\mathbf{e}}^*_{m+2},$$

azért

$$\underline{\boldsymbol{\psi}}^*\underline{\mathbf{\Phi}}_X = \underline{\mathbf{0}}^*, \quad \underline{\boldsymbol{\psi}}^*\underline{\mathbf{s}}_X = 1.$$

Felhasználjuk még, hogy a 3. lemma miatt $[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]$ adjungált mátrixának utolsó sorában, és így $\underline{\boldsymbol{\psi}}^*$-ban, az elemek előjele váltakozik.

Most helyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $\underline{\mathbf{y}}_X$ lehetséges megoldás:

$$\underline{\mathbf{y}}_X^* \underline{\mathbf{\Phi}} = \underline{\boldsymbol{\psi}}^* \underline{\mathbf{\Phi}}_X = \underline{\mathbf{0}}^*, \quad \left|\underline{\mathbf{y}}_X^*\right| \underline{\mathbf{r}} = \left|\underline{\boldsymbol{\psi}}^* \underline{\mathbf{s}}_X\right| = 1,$$

célértéke (2) miatt:

$$\underline{\mathbf{y}}_X^* \underline{\mathbf{f}} = \underline{\boldsymbol{\psi}}^* \underline{\mathbf{f}}_X = \underline{\mathbf{e}}_{m+2}^* \left[\underline{\mathbf{\Phi}}_X ; \underline{\mathbf{s}}_X\right]^{-1} \underline{\mathbf{f}}_X = d_X$$

Ugyanígy $-\underline{\mathbf{y}}_X$ is lehetséges megoldás, célértéke $-d_X$. Az $\underline{\mathbf{y}}_X$ és $-\underline{\mathbf{y}}_X$ lehetséges megoldások közül tehát az egyik célértéke $|d_X|$.

Végül $\underline{\mathbf{y}}_X$ $i_0, i_1, \ldots, i_m$ indexű elemei nem 0-k, előjelük váltakozik. Így az (5) összefüggés alapján a (3) duál feladat $\underline{\mathbf{y}}_X$-nek megfelelő lehetséges megoldásában a nem 0 elemek sorvektorainak rangja egyenlő a $[\underline{\mathbf{\Phi}}_X; \underline{\mathbf{s}}_X]$ mátrix rangjával, azaz m+2-vel. Tehát az $\underline{\mathbf{y}}_X$ és a $-\underline{\mathbf{y}}_X$ megoldásokhoz (5) alapján a (3) duál feladat nem degenerált lehetséges bázismegoldásai tartoznak.

Az 5. lemma lehetővé teszi, hogy a lineáris programozás dualitási tételeit alkalmazzuk. Először az optimum feltételét adjuk meg.

6. tétel. Legyenek a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ alapfüggvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban. Ha $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, és a φ_X alternáló függvényre minden x_i alappontban

$$\left| f_i - \varphi_X(x_i) \right| \le r_i \left| d_X \right|,$$

akkor φ_X a legjobb diszkrét közelítés.

Bizonyítás. A tétel feltételei szerint $\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{c}}_X \\ |d_X| \end{bmatrix}$ az (1) primál feladat lehetséges megoldása, és célértéke $|d_X|$. Az 5. lemma szerint a duál feladatnak van olyan lehetséges megoldása, amelynek célértéke szintén $|d_X|$. A gyenge dualitási tétel következtében $\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{c}}_X \\ |d_X| \end{bmatrix}$ a primál feladat optimális megoldása.

Mint az 5. lemmában láttuk, minden alternáló függvényhez a duál feladat egy lehetséges bázismegoldása tartozik. Ha egy alternáló függvény nem a legjobb diszkrét közelítés, akkor (lényegében a duál szimplex algoritmus menetét követve) áttérhetünk egy másik alternáló függvényre, javítva közben a duál célértéket.

7. tétel. Legyenek a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ alapfüggvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban. Ha $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, és a φ_X alternáló függvény nem a legjobb diszkrét közelítés, akkor megadható olyan φ_Y alternáló függvény, amelyre

$$|d_X| < |d_Y|.$$

Bizonyítás. Legyen $X = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}\}$, ahol $0 \le i_0 < i_1 < \ldots < i_{m+1} \le n$. Ha a φ_X alternáló függvény nem a legjobb diszkrét közelítés, akkor az 6. tétel szerint létezik olyan x_k $(\notin X)$ alappont, amelyre

$$\left| f_k - \varphi_X(x_k) \right| > r_k \left| d_X \right| \tag{6}$$

Legyen $Y = X \cup \{x_k\} \setminus \{x_l\}$, ahol az $x_l \in X$ alappont l indexét a következőképpen határozzuk meg:

$(i)\ \ l = i_t$, ha $x_{i_{t-1}} < x_k < x_{i_{t+1}}$, és $\operatorname{sgn}\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right) = \operatorname{sgn}\left(f_{i_t} - \varphi_X\left(x_{i_t}\right)\right)$,

ahol $0 \le t \le m+1,\ \ x_{i_{-1}} = -\infty,\ \ x_{i_{m+2}} = \infty$

$(ii)\ \ l = i_0$, ha $x_k > x_{i_{m+1}}$, és $\operatorname{sgn}\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right) = -\operatorname{sgn}\left(f_{i_{m+1}} - \varphi_X\left(x_{i_{m+1}}\right)\right)$,

$(iii)\ \ l = i_{m+1}$, ha $x_k < x_{i_0}$, és $\operatorname{sgn}\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right) = -\operatorname{sgn}\left(f_{i_0} - \varphi_X\left(x_{i_0}\right)\right)$.

Tegyük fel, hogy Y elemeit nagyság szerint rendezve x_k a j+1-edik, azaz (i) esetén $j = t$, (ii) esetén $j = m + 1$ és (iii) esetén $j = 0$. Legyen ezután

$$\underline{\hat{\mathbf{f}}}_Y = \underline{\mathbf{f}}_Y + \left(\varphi_X\left(x_k\right) + (-1)^j r_k d_X - f_k\right)\underline{\mathbf{e}}_j .$$

Látható, hogy a φ_X alternáló függvény $\underline{\mathbf{c}}_X$ együtthatóvektora és (i) esetén $d'_X = d_X$, (ii) és (iii) esetén $d'_X = -d_X$ kielégíti a

$$\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{c}}_X \\ d'_X\end{bmatrix} = \underline{\hat{\mathbf{f}}}_Y$$

lineáris egyenletrendszert. Ugyanakkor a φ_Y alternáló függvényhez a

$$\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{c}}_Y \\ d_Y\end{bmatrix} = \underline{\mathbf{f}}_Y$$

egyenletrendszer tartozik. Így

$$\begin{aligned} d_Y - d'_X &= \underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]^{-1}\underline{\mathbf{f}}_Y - \underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]^{-1}\underline{\hat{\mathbf{f}}}_Y = \\ &= \underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]^{-1}\left(\underline{\mathbf{f}}_Y - \underline{\hat{\mathbf{f}}}_Y\right) = \\ &= \left(\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right) - (-1)^j r_k d_X\right)\underline{\mathbf{e}}^*_{m+2}\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]^{-1}\underline{\mathbf{e}}_j . \end{aligned}$$

Itt egyrészt a (6) feltétel szerint $f_k - \varphi_X\left(x_k\right)$ nagyobb abszolút értékű, mint $(-1)^j r_k d_X$, ezért

$$\operatorname{sgn}\left(\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right) - (-1)^j r_k d_X\right) = \operatorname{sgn}\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right),$$

másrész $f_{i_j} - \varphi_X\left(x_{i_j}\right) = (-1)^j r_{i_j} d_X$ miatt (i), (ii) és (iii) bármelyike esetén

$$\operatorname{sgn}\left(f_k - \varphi_X\left(x_k\right)\right) = \operatorname{sgn}\left((-1)^j r_{i_j} d'_X\right) = \operatorname{sgn}\left((-1)^j d'_X\right).$$

Végül $\left|\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]\right|$ utolsó oszlop szerinti kifejtése alapján $\operatorname{sgn}\left(\left|\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_Y ; \underline{\mathbf{s}}_Y\right]\right|\right) =$
$= (-1)^{m+1}\operatorname{sgn}\left(\left|\underline{\mathbf{\Phi}}_{Y\setminus\{x_k\}}\right|\right)$, ahonnan

$$\operatorname{sgn}\left(\underline{\mathbf{e}}_{m+2}^{*}\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_{Y};\underline{\mathbf{s}}_{Y}\right]^{-1}\underline{\mathbf{e}}_{j}\right)=\operatorname{sgn}\left(\frac{=(-1)^{m+1+j}\left|\underline{\mathbf{\Phi}}_{Y\setminus\{x_k\}}\right|}{\left|\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_{Y};\underline{\mathbf{s}}_{Y}\right]\right|}\right)=(-1)^{j}.$$

Ezek alapján

$$\operatorname{sgn}(d_Y-d'_X)=\operatorname{sgn}\Big(\big(f_k-\varphi_X(x_k)\big)-(-1)^j r_k\, d_X\Big)\operatorname{sgn}\left(\underline{\mathbf{e}}_{m+2}^{*}\left[\underline{\mathbf{\Phi}}_{Y};\underline{\mathbf{s}}_{Y}\right]^{-1}\underline{\mathbf{e}}_{j}\right)=$$

$$=\operatorname{sgn}\left((-1)^j d'_X\right)(-1)^j=\operatorname{sgn}(d'_X).$$

Innen

$$|d_Y|=|d_Y-d'_X|+|d'_X|\geq|d'_X|=|d_X|,$$

amit bizonyítani akartunk.

A 6. és a 7. tétel alapján algoritmust adhatunk az optimális megoldás meghatározására az $[a,b]$ intervallumban folytonos, CSEBISEV-féle alapfüggvény-rendszer esetén, ha az alappontok száma nagyobb, mint az alapfüggvények száma:

I. Induljunk ki az alappontok egy $(m + 2)$ elemből álló X részhalmazból.

II. Határozzuk meg a φ_X alternáló függvényt.

III. A 6. tétel alapján döntsük el, hogy φ_X a legjobb diszkrét közelítés-e. Ha igen, befejeződött az eljárás nem, ha a IV. lépés következik.

IV. A 7. tétel bizonyításánál leírt módon határozzuk meg az Y halmazt, majd X helyébe Y-t téve folytassuk az eljárást a II. lépésnél.

Az eljárás véges, mert az alternáló függvények halmaza véges, és $|d_X|$ minden lépésben növekszik. Így az 1. tétel és az algoritmus alapján megkapjuk CSEBISEV tételének diszkrét változatát:

8. tétel. Legyenek a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ alapfüggvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban. Ha $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ CSEBISEV-féle $[a,b]$-ben, akkor az alapfüggvények φ lineáris kombinációja akkor és csak akkor a legjobb diszkrét közelítés, ha φ alternáló függvény az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alappontok $(m < n)$ valamely $(m+2)$ elemű X részhalmazára, és minden alappontban

$$\left|f_i-\varphi(x_i)\right|\leq r_i\,|d_X|.$$

A 5. lemma szerint az alternáló függvényekhez a duál feladat nem degenerált bázismegoldása tartozik, így kapjuk HAAR tételének diszkrét változatában az elegendőséget (a szükségesség igazolását az olvasóra hagyjuk).

9. tétel. Legyenek a $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ alapfüggvények folytonosak az $[a,b]$ intervallumban. A legjobb diszkrét közelítés akkor és csak akkor egyértelmű az $[a,b]$ intervallumban megadott, tetszőleges n számú alappont esetén $(n > m)$, ha $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ CSEBISEV-féle rendszert alkot $[a,b]$-ben.

Irodalomjegyzék

[1] J. N. BRONSTEJN, K. A. SZEMANGYEJEV, G. MOSIOL, H. MÜHLIG: Matematikai kézikönyv, Typo TEX Kiadó, Budapest, 2000.

[2] HAAR ALFRÉD összegyűjtött művei. (Sajtó alá rendezte SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA), Akadémiai Kiadó, 1959

[3] HORNUNG T.: A legkisebb maximum módszere, Magyar Tudomány Napja Konferencia, 2007.

[4] HORNUNG T.: Diszkrét CSEBISEV-approximáció, Matematika, Fizika és Informatika Oktatók XXXII. konferenciája, 2008.

[5] KIS O., KOVÁCS M.: Numerikus módszerek, Műszaki Könyvkiadó, 1973.

[6] MÓRICZ F.: Numerikus analízis, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[7] STOYAN G., TAKÓ G.: Numerikus módszerek: elmélet – gyakorlat – szoftver I., ELTE – TypoTEX, Budapest, 1993.