DR. GUBÁN MIKLÓS*

Egy többfokozatú centrumkeresési probléma belső fázisának nem lineáris programozási modellje és egy megoldási módszere

Non-linear programming model and solving method of the first phase of multiphases centre problem

In this article, I will to give an integer non-linear programming model of the first phase of the three phase method. The objective function of this model has got an indefinite quadratic form. This problem has not got any exact algorithm. But the variables of the model are special, as these are integer variables, and their values are 0 or 1. If we substitute these variables with new special variables, and change some conditions, the new model will be linear integer programming model. The components of the original objective function are rational numbers (these components are cost components), so it can give a new objective function with integer coefficients. The optimum of this new function will correspond with the original objective function. The new model with the new objective function has got an exact solving method this time.

1. Bevezetés

Korábbi dolgozatokban már megmutattam, hogy egy telepítési problémához megadható egy matematikai programozási feladat [2, 3]. A telepítési probléma valójában egy speciális centrumkeresési probléma, melynek teljes általános megoldása nem létezik. Speciális esetekben, mint például az adott telepítési problémánál azonban nagyon jó közelítő módszerek alkothatók. Korábbi cikkekben a feladat megoldásához megadtam egy háromfokozatú heurisztikus algoritmust, amely hatékonyan oldja meg a teljes telepítési problémát. Felvetődik azonban annak a kérdése, hogy ez a feladat egzakt módszerekkel megoldható-e. Ennek eldöntéséhez csak a háromfokozatú heurisztikus algoritmus belső fázisát kell megvizsgálnunk, hiszen a másik két fázishoz természetesen megadhatóak egzakt módszerek. Ezt korábbi cikkeimben meg is adtam [2, 3, 9].

Ebben a cikkben elsőként azt mutatom meg, hogy egy háromfokozatú centrumkeresési probléma belső fázisához megadható egy kvadratikus programozási feladat, melynek a feltételrendszere nem lineáris. Emellett a modell célfüggvénye sajnos egy indefinit kvadratikus alakkal rendelkezik [1]. Ez a probléma általános esetben egzakt módon nem oldható meg. Azonban a feladatban szereplő változók speciálisak, azaz egészértékűek és 0 vagy 1 értékeket vehetnek fel. Ha a modellben szereplő meghatározott változók helyett új változókat vezetünk be és megfelelő új feltételeket veszünk a feladathoz, akkor megadható egy olyan egészértékű probléma, melynek célfüggvénye lineáris lesz. Az eredeti a célfüggvénynek a komponensei a feladatból eredően (hiszen költségelemek) racionális számok, ebből következik, hogy a célfüggvényhez megadható egy

* BGF Pénzügyi és Számviteli Főiskolai Kar Salgótarjáni Intézet, Matematika – Statisztika Tanszék, főiskolai docens, PhD.

olyan egészértékű célfüggvény, melynek az optimuma ugyanott van, ahol az eredeti célfüggvénynek. Ha ezt az új célfüggvényt tekintjük, akkor erre a problémára már léteznek olyan módszerek, melyek iteratív módon megoldják a feladatot [10].

Az alábbiakban részletesen megadom a feladat modelljét és a megoldás módszerét.

2. A feladat feltételrendszere

A feladat feltételrendszere kis módosítással megegyezik az [1, 2]-ben leírtakkal, így azt felhasználhatjuk ehhez a modellhez. Ebben a cikkben nem részletezem az egyes elemek gyakorlati jelentését, ezt már többször megadtam, és ebben a cikkben nem is használom ki a jelentésüket. Egyedül azt a tényt fogom felhasználni, hogy a célfüggvény költségkomponensei pozitív racionális számok. A problémát, már mint matematikai modellel rendelkező feladatot tekintem. A jelölésekben az [1, 2]-ben alkalmazott jelöléseket használom.

A feladat modellje összefoglalva a következő lesz:

$$x_{ki}^{\nu} \geq 0;\ x_{ki}^{\nu} = \text{int}\ (k = 1,\ldots n; i = 1,\ldots,p_0; \nu = 1,\ldots,m) \tag{1}$$

$$y_{kj}^{\mu} \geq 0;\ y_{kj}^{\mu} = \text{int}\ (k = 1,\ldots n;\ j = 1,\ldots,r_0; \mu = 1,\ldots,w) \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^{\nu} = 1; (i = 1,\ldots,p_0;\ \nu = 1,\ldots,m) \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{r_0} y_{kj}^{\mu} = 1; (k = 1,\ldots,n; \mu = 1,\ldots,w) \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \leq c_{k}^{\nu};\ (k = 1,\ldots n; \nu = 1,\ldots,m) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \geq c^{\nu}; (k = 1,\ldots n; \nu = 1,\ldots,m) \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^{\mu} \sum_{v=1}^{m} \sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} d_{i\mu} \leq b_{j\mu}; (j = 1,\ldots,r_0; \mu = 1,\ldots,w) \tag{7}$$

$$K_{red}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} x_{ki}^{\nu} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{\mu=1}^{w} k_{kj\mu\varepsilon}^{AS} \left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu} \right) l'_{kj} y_{kj}^{\mu} + \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(k_{k\nu i}^{BS} c_{ki}^{\nu} l'_{ki} + k_{k\nu}^{M} c_{ki}^{\nu} \right) x_{ki}^{\nu} \to \min \tag{8}$$

Jelölje

$$\mathbf{x} = \left[x_{ki}^{\nu}\right], \mathbf{y} = \left[y_{kj}^{\mu}\right]. \tag{9}$$

Ez a feladat egy nem lineáris programozási feladat, melynek a kvadratikus alakhoz tartozó mátrixa indefinit. Ezt igazoltam [1]-ben. Emellett a (7) feltétel nemlineáris feltétel.

3. A feladat visszavezetése lineáris egészértékű feladatra

A megoldáshoz egy lineáris feltételrendszert és célfüggvényt kell megadnunk. Helyettesítsük az y komponenseket egy y' változóval. Három feltételben [(2),(4),(7)] és a (8) célfüggvényben szerepelnek y változók. Ezeket kell átalakítanunk. Jelölje

$$y'^{\nu\mu}_{lijk} = x^{\nu}_{li} y^{\mu}_{kj}\,;\left(k = 1,\ldots n;\ i = 1,\ldots,p_0;\ j = 1,\ldots,r_0;\ l = 1,\ldots,n;\ \mu = 1,\ldots,w;\ \nu = 1,\ldots,m\right), \quad (10)$$

$$\mathbf{y}' = \left[y'^{\nu\mu}_{lijk}\right].$$

3.1. A (2) feltétel átalakítása

Tekintsük a (2) feltételt. Ekkor az új feltételrendszerben az

$$y'^{\nu\mu}_{lijk} \geq 0; y'^{\nu\mu}_{lijk} = \text{int} \quad (11)$$

feltétel teljesül, hiszen mind az x, mind az y komponensek nem negatívak. Az egészértékűség is teljesül, mert két egész változó szorzata is egész lesz. (Emellett teljesül, hogy a bevezetett $y'^{\nu\mu}_{kijk}$ változók szintén 0 és 1 értéket vehetnek fel.)

3.2. A (4) feltétel átalakítása

A (10) és a (3) alapján

$$\sum_{l=1}^{n} y'^{\nu\mu}_{lijk} = \sum_{l=1}^{n} x^{\nu}_{li} y^{\mu}_{kj} = y^{\mu}_{kj} \cdot \sum_{l=1}^{n} x^{\nu}_{li} = y^{\mu}_{kj}\,. \quad (12)$$

Ebből kapjuk:

$$\sum_{l=1}^{n} y'^{\nu\mu}_{lijk} = y^{\mu}_{kj}\ ;\ i \in \{1,\ldots,p_0\}. \quad (13)$$

Ez a *visszafejtési összefüggés*. A (2) feltétel (4) alapján a

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{l=1}^{n} y'^{\nu\mu}_{lijk} = 1 \quad (14)$$

összefüggés lesz. Figyelembe véve a (2) feltételt, az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\sum_{j=1}^{r_0} y'^{\nu\mu}_{lijk} = \sum_{j=1}^{r_0} x^{\nu}_{li} y^{\mu}_{kj} = x^{\nu}_{li} \sum_{j=1}^{r_0} y^{\mu}_{kj} = x^{\nu}_{li}\,. \quad (15)$$

A (16) összefüggést átalakítva, az új (4) feltétel az alábbi lesz:

$$-x^{\nu}_{li} + \sum_{j=1}^{r_0} y'^{\nu\mu}_{lijk} = 0\,. \quad (16)$$

3.3. A (7) feltétel átalakítása

A (7) feltétel bal oldala nem lineáris:

$$\sum_{k=1}^{n} y_{kj}^{\mu} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} d_{i\mu} \le b_{j\mu} . \tag{17}$$

Alakítsuk át a következőképpen:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} y_{kj}^{\mu} d_{i\mu} \le b_{j\mu} . \tag{18}$$

Alkalmazva a (10) összefüggést, kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{p_0} y_{kijk}'^{\nu\mu} d_{i\mu} \le b_{j\mu} . \tag{19}$$

A feltétel baloldala már lineárisan függ $y_{kijk}'^{\nu\mu}$ -től. A feltételrendszert átalakítottuk úgy, hogy a nemlineáris feltétel lineáris lett.

3.4. A célfüggvény

Induljunk ki a (8) célfüggvényből (ez a redukált költségfüggvény). Rendezzük át a következő alakba:

$$K_{red}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{\mu=1}^{w} k_{kj\mu\varepsilon}^{AS} \left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu} \right) l_{kj}' x_{ki}^{\nu} y_{kj}^{\mu} + \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(k_{k\nu i}^{BS} c_{ki}^{\nu} l_{ki}' + k_{k\nu}^{M} c_{ki}^{\nu} \right) x_{ki}^{\nu} . \tag{20}$$

Alkalmazzuk a (10) összefüggést:

$$\hat{K}_{red}(\mathbf{x},\mathbf{y}') = \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_0} \sum_{\mu=1}^{w} k_{kj\mu\varepsilon}^{AS} \left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu} \right) l_{kj}' y_{kijk}'^{\nu\mu} + \sum_{i=1}^{p_0} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(k_{k\nu i}^{BS} c_{ki}^{\nu} l_{ki}' + k_{k\nu}^{M} c_{ki}^{\nu} \right) x_{ki}^{\nu} . \tag{21}$$

Ez már egy tiszta egészértékű lineáris programozási feladat célfüggvénye. A teljes modell a következő lesz:

$$x_{ki}^{\nu} \ge 0;\ x_{ki}^{\nu} = \text{int}\ \left(k = 1,\ldots n; i = 1,\ldots,p_0; \nu = 1,\ldots,m\right)$$

$$y_{lijk}'^{\nu\mu} \ge 0;\ y_{lijk}'^{\nu\mu} = \text{int}$$

$$\left(l = 1,\ldots n; k = 1,\ldots n;\ i = 1,\ldots,p_0; j = 1,\ldots,r_0; \mu = 1,\ldots,w; \nu = 1,\ldots,m\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki}^{\nu} = 1; \left(i = 1,\ldots,p_0;\ \nu = 1,\ldots,m\right)$$

$$\sum_{j=1}^{r_0} \sum_{l=1}^{n} y_{lijk}'^{\nu\mu} = 1; \left(i = 1,\ldots,p_0; k = 1,\ldots,n; \nu = 1,\ldots,m; \mu = 1,\ldots,w\right)$$

$$-x_{li}^{\nu} + \sum_{j=1}^{r_0} y_{lijk}'^{\nu\mu} = 0\ ; \left(l = 1,\ldots,n; k = 1,\ldots,n; i = 1,\ldots p_0; \mu = 1,\ldots,w; \nu = 1,\ldots,m\right) \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \leq c_k^{\nu};\ (k=1,\dots n; \nu=1,\dots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} x_{ki}^{\nu} q_{i\nu} \geq c^{\nu};(k=1,\dots n; \nu=1,\dots,m)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{i=1}^{p_0} y_{kijk}^{\prime\nu\mu} d_{i\mu} \leq b_{j\mu};(j=1,\dots,r_0;\mu=1,\dots,w)$$

$$\hat{K}_{red}(\mathbf{x},\mathbf{y}')=\sum_{i=1}^{p_0}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{j=1}^{r_0}\sum_{\mu=1}^{w} k_{kj\mu\varepsilon}^{AS}\left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu}\right) l'_{kj} y_{kijk}^{\prime\nu\mu} + \sum_{i=1}^{p_0}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(k_{k\nu i}^{BS} c_{ki}^{\nu} l'_{ki} + k_{k\nu}^{M} c_{ki}^{\nu}\right) x_{ki}^{\nu} \to \min$$

3.5. Tétel

A (22) feladatnak akkor és csak akkor van optimális megoldása ha az eredeti feladatnak is van optimális megoldása. Az egyik optimális megoldásából származtatható a másik feladat optimális megoldása. A két feladatnak optimális megoldás esetén a célfüggvény értéke ugyanaz lesz.

Bizonyítás

Jelölje L_N a nem lineáris feladat lehetséges megoldás halmazát és jelölje L_E a (22) feladat lehetséges megoldás halmazát. Legyen $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} \in L_N$. Képezzük belőle a (10) alapján a $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}'\end{bmatrix}$-t Ez a vektor a (11)-(19) összefüggések alapján kielégíti a (22) feltételrendszerét, azaz $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}'\end{bmatrix} \in L_E$.

Ez fordítva is igaz. Legyen $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}'\end{bmatrix} \in L_E$. Alkalmazzuk a visszafejtési összefüggést. A kapott $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}$ vektor eleget tesz az (1) feltételnek, hiszen az x feltételei nem változtak. (2) feltétel az x és $\mathbf{y}'$ nem negativitásából és egészértékűségéből következik. (3) következik (13,16)-ból. (7) feltétel (19,18,17) ekvivalens átalakításokból következik.

Tegyük fel, hogy $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}_0\end{bmatrix} \in L_N$ optimális megoldása az eredeti feladatnak.

Ekkor fennáll: $$K_{red}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \leq K_{red}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} \in L_N. \qquad (23)$$

Képezzük az $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}'_0\end{bmatrix} \in L_E$ (10) szerint.

$$K_{red}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \hat{K}_{red}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}'_0). \tag{24}$$

Bármely $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}'\end{bmatrix} \in L_E$ vektorhoz – a visszafejtési összefüggés szerint egy rögzített $i \in \{1, \ldots, p_0\}$ érték esetén – megadható egy $\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} \in L_N$.

Erre teljesül:
$$K_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{K}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'). \tag{25}$$

Tehát:
$$\hat{K}_{red}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}'_0) = K_{red}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \le K_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{K}_{red}(\mathbf{x}, \mathbf{y}'). \tag{26}$$

Ebből következik, hogy $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}'_0\end{bmatrix} \in L_E$ optimális megoldása (22)-nek. Az állítás fordítva is igaz. Ha most $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}'_0\end{bmatrix} \in L_E$ (22) optimális megoldásából indulunk ki, akkor az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk, hogy a származtatott $\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}_0\end{bmatrix} \in L_N$ optimális megoldása lesz az eredeti feladatnak.

A fentiekből következik, hogy az x^{ν}_{ki} változóknak ugyanaz lesz az értéke az optimális esetben, az y^{μ}_{kj} változók értéke pedig a (13) visszafejtési összefüggésből meghatározható. Ebből következik, hogy elegendő megoldani a (22) feladatot.

A célfüggvény komponensei költségek, melyek pozitív racionális számok. Alakítsuk most át a célfüggvényt úgy, hogy megszorozzuk egy alkalmasan választott konstanssal. Ez a konstans legyen a költségelemek nevezőjének legkisebb közös többszöröse:

$$K'_{red} = k \cdot \hat{K}_{red}, \tag{27}$$

ahol *k* a költségelemek nevezőjének a legkisebb közös többszöröse. Ekkor minden költségelem egész szám lesz. Jelölje

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}'\end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}^* = \left[\tilde{\mathbf{c}}^*_1, \quad \tilde{\mathbf{c}}^*_2\right] \tag{29}$$

ahol

$$\tilde{\mathbf{c}}^*_1 = k \cdot \left[\left(\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{BS}_{k\nu i} c^{\nu}_{ki} l'_{ki} + k^{M}_{k\nu} c^{\nu}_{ki}\right) x^{\nu}_{ki}\right)\right], \tag{30}$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_2^* = k \cdot \left[k_{kj\mu\varepsilon}^{AS} \left(\sum_{t=1}^{m} q_{it} a_{t\mu} \right) l'_{kj} \right]. \tag{31}$$

Könnyen belátható, hogy a feladat most már egy

$$\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{x}} \in \{0;1\} \\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \le \tilde{\mathbf{b}} \\ \hline \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{c}}^* \tilde{\mathbf{x}} \to \max \end{array} \qquad \tilde{c}_i = \text{int} \tag{32}$$

alakra hozható [10]. A célfüggvény korlátos a lehetséges megoldások halmazán. Ennek a belátása nagyon egyszerű. Az $\tilde{\mathbf{x}}$ komponensei 0 vagy 1 értékűek, a $\tilde{\mathbf{c}}$ komponensei pozitív egész számok. Ebből következik:

$$0 \le \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{c}}^* \tilde{\mathbf{x}} \le \tilde{\mathbf{c}}^* \mathbf{1} = K\,. \tag{33}$$

4. A megoldás algoritmusa

Ez a feladat már rendelkezik egzakt megoldási módszerekkel. Ilyen megoldás lehet a tiszta egészértékű feladatok a *G*-metszeten alapuló megoldási módszere. Egy másik megoldási módszer, melyet kicsit részletesebben is ismertetek a [11]-ben található metszősíkok módszerén alapul, kiegészítve a gradiens módszerrel.

4.1. lépés

Vegyük a

$$\begin{array}{c} \mathbf{0} \le \tilde{\mathbf{x}} \le \mathbf{1} \\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \le \tilde{\mathbf{b}} \\ \hline \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^* (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{1}) \to \max \end{array} \tag{34}$$

folytonos feladatot és oldjuk meg. Ennek a kvadratikus feladatnak már vannak egzakt megoldási módszerei, hiszen

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^* (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{1}) = \tilde{\mathbf{x}}^* \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^* \mathbf{1} = \tilde{\mathbf{x}}^* \mathbf{E} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^* \mathbf{1}\,, \tag{35}$$

tehát a kvadratikus alakhoz tartozó mátrix már pozitív definit (**E**) és ebben az esetben már megoldható a feladat [10].

Ehhez keressük meg a feladat egy lokális minimumát a gradiens (vagy hatékony irányok) módszerrel, majd a metszősíkok módszerével szűkítsük a halmazt. Ezt egészen addig ismételjük, míg a szűkített L halmaz az üres halmaz nem lesz. Válasszuk ki a kapott lokális minimumok közül a legnagyobbat, ez lesz az optimális megoldás. A $\tilde{g}$ korlátos a feladat lehetséges megoldása halmazán ($\tilde{L}$), hiszen

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}) \le 0,\ \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{L}\,. \tag{36}$$

Ekkor, ha van a feladatnak lehetséges megoldása, akkor a $\tilde{g}$ célfüggvény korlátossága miatt van optimuma is.

4.2. lépés

Két eset lehet:

a) $\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}_0) = 0$,

b) $\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}_0) < 0$.

Ha a *b)* teljesül, akkor nincs lehetséges egészértékű megoldása a feladatnak, ha *a)* teljesül, akkor van. Az *a)* esetben vegyük a feltételrendszerhez az

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_0) + 1 \tag{37}$$

feltételt és oldjuk meg újra a $\tilde{g}$ célfüggvénnyel az alábbi feladatot:

$$\begin{array}{c} \mathbf{0} \leq \tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{1} \\ \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_0) + 1 \\ \hline \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^*(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{1}) \to \max \end{array} \tag{38}$$

4.3. lépés

Folytassuk ezt az eljárást a 4.2. lépéstől egészen addig, míg *b)* pontig nem jutunk. Ilyen eset biztos lesz, hiszen $\tilde{f}$ korlátos a (32) feltételrendszerhez tartozó lehetséges megoldások halmazán. Ha ez az *i.* iterációs lépésben áll fenn, akkor az előző $\tilde{\mathbf{x}}_{i-1}$ lesz az optimális megoldás.

5. Összefoglalás

A dolgozat egy multinacionális cég szerelőcentrumainak a telepítési modelljét és a belső fázisának egy megoldási módszerét mutatja be (redukált költséggel). A visszavezetés során kvadratikus programozási modellt kaptunk, melynek csak speciális esetekben van megoldása, ezért a feladatot alkalmas átalakítások segítségével egy olyan lineáris feladattá alakítottuk át, amelyben a változók 0 vagy 1 értéket vehetnek fel. Erre a modellre alkalmaztuk a [11]-ben szereplő megoldási módszert, mellyel már megkapjuk az eredeti feladat optimális megoldását, amennyiben van ilyen. Bár a módszer megadja az optimumot, azonban a fázisok további lépéseit ismerve nem lesz hatékony, hiszen több újabb iterációs lépés jön be, ráadásul a feladat mérete

$$(p_0 \cdot m + r_0 \cdot w + 2n \cdot m + r_0 \cdot w) \times [n \cdot (p_0 \cdot m + r_0 \cdot w)]\text{-ről} \tag{39}$$

tovább növekszik

$$(p_0 \cdot m + p_0 \cdot n + m \cdot w + p_0 \cdot n^2 \cdot w \cdot m + 2n \cdot m + r_0 \cdot w) \times [n \cdot p_0 \cdot m \cdot (1 + r_0 \cdot w)]\text{-ra.} \tag{40}$$

Ennek a megoldási lépésszámát jelenleg nem ismerjük (ez egy későbbi elemzés része lehet), bár tudjuk, hogy mindenféleképpen véget ér az algoritmus [2, 11]. Az azonban a korábbi lépésszám elemzésekből és az együttható mátrix méretéből látható, hogy nagyon nehézkes a módszer alkalmazása. Korábban [3] megadtunk egy heurisztikus algoritmust, amely a problémát hatékonyan kezelni tudja. Ezek és [2] alapján elmondhatjuk, hogy mindenféleképpen érdemes a heurisztikus megoldást alkalmazni az eredeti telepítési problémára, ahol például a legnagyobb mátrix (mely kvadratikus) rendje csak

$$\max\left(n \cdot p_0; n \cdot r_0; w \cdot m\right) \tag{41}$$

lesz.

Összefoglalva tehát elmondhatjuk, hogy a feladat megoldható egzakt módszerekkel is.

6. Irodalomjegyzék

[1] GUBÁN, M. – CSELÉNYI, J.: *Quadratic linear-programming model to establish delayed assembling plants oriented by logistics,* Logistics Networks. Models, Methods and Applications (Ed. T. BÁNYAI, J. CSELÉNYI) 2004, University of Miskolc, ISBN 963 661 641 8 pp. 279-288.

[2] GUBÁN, M: *Késleltetett (kihelyezett) összeszerelő üzemek logisztika orientált telepítésére szolgáló matematikai modellek és módszerek fejlesztése globalizált termelés esetén* PhD-értekezés. Miskolci Egyetem, 2004.

[3] GUBÁN M., CSELÉNYI J, VADÁSZ D.: *Comparing method of mathematical programming and heuristic method to establish delayed assembly plants oriented by logistics and examination of these methods.* 4th Workshop on European Scientific and Industrial Collaboration May 2003, T. TÓTH, P. BIKFALVI, J. GÖNDRI NAGY (Ed.) Published by Institute of Information Science University of Miskolc, ISBN 963 661 570 5 Miskolc Vol. II pp. 587-594.

[4] GUBAN, M., CSELÉNYI J. (2004) *The method and analysis of establishment of logistic-oriented postponement assembly plants*, Chapter 25, DAAAM International Scientific Book, 2004, Wien, B. KATALINIC (Ed.), Published by DAAAM International, ISBN 3 901509 38 0, ISSN 1726 9687, Vienna, Austria pp. 255-264.

[5] GUBÁN, M. – PROF. DR. CSELÉNYI, J. – DR. KOVÁCS, L. *Methodes for establish of delayed assembling plants oriented by logistic*s Miskolcer Gespräche 2001 Seminarband. 13-14. September 2001, Published by University of Miskolc ISBN 963 661493 8, Miskolc pp. 77-83.

[6] GUBÁN, M: *Késleltetett összeszerelő üzemek logisztikaorientált optimális telepítésére szolgáló matematikai modellek.* Magyar Tudomány napja. Doktoranduszok fóruma. Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki kar szekciókiadványa 2000. október 30. pp. 19-24.

[7] GUBÁN, M: *Heuristic algorithm to establish delayed assembling plants oriented by logistics.* 3rd International Conference of PhD Students. University of Miskolc. 13-19 August 2001. ISBN 963 661 480 6 pp. 71-76.

[8] GUBÁN, M, DR. CSELÉNYI, J: *Mathematical model and heuristic algorithm to establish delayed assembling plants oriented by logistics.* Miskolcer Gespraeche 2001.

[9] Operációkutatás I.-II. szerk. CSERNYÁK LÁSZLÓ, Nemzeti Tankönykiadó, 1990.

[10] KREKÓ BÉLA: Optimumszámítás (Nemlineáris programozás), Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1972 KG-1802-k-7275 pp. 411-415.