Hornung Tamás*

A LEGKISEBB MAXIMUM MÓDSZERE

1. BEVEZETÉS

Ismert, hogy egy n+1 helyen adott függvényhez illeszthető olyan legfeljebb n-edfokú polinom, az ún. LAGRANGE-féle interpolációs polinom (l. pl. [3], [4], [5]), amelynek grafikonja áthalad mindegyik megadott grafikonponton. Ennek a polinomnak azonban a kívánatosnál több szélsőértéke lehet. Ilyenkor célszerű alacsonyabb fokszámú polinommal végezni az interpolációt.

Ha az illesztendő polinom fokszáma szigorúan kisebb, mint n, akkor grafikonja általában nem megy át minden megadott grafikonponton. Ekkor a „legközelebb haladó" polinomot keressük. A távolságot szokás az adott helyeken vett eltérések négyzetösszegének négyzetgyökével mérni: ekkor a legkisebb négyzetek módszeréhez jutunk (l. [4], [5]). Ha azonban a távolságot az adott helyeken számított legnagyobb (súlyozott) eltéréssel mérjük, akkor az illesztési feladat egy lineáris programozási feladathoz vezet. Ezt a problémát (egyenlő súlyok esetén) [1] diszkrét CSEBISEV-approximációként említi. Megjegyezzük, hogy a feladat folytonos változatát, amelyben egy [a,b] intervallum pontjaiban vett legnagyobb eltérés minimumát keressük, szokás CSEBISEV-approximációnak, legjobb közelítésnek, ill. egyenletesen legjobb közelítésnek nevezni (vö. [1], [3], [5]). Ha az alappontok száma elég nagy, akkor bizonyos feltételek mellett a diszkrét feladat megoldása tekinthető a folytonos feladat megoldása közelítésének.

A dolgozatban [2] alapján példát mutatunk arra, hogy az illesztendő polinom fokszámát célszerű több mint eggyel kisebbre választani, mint az alappontok száma, viszont el szeretnénk érni, hogy az alappontokban a közelítő polinom értéke a függvényérték adott sugarú környezetébe essék. Felírjuk a probléma lineáris programozási modelljét. Ennek optimális megoldása meghatározza azt a polinomot, amelynek az adott helyeken a közelítendő függvényértékektől mért (súlyozott) eltéréseinek maximuma a legkisebb. Ezért szerepel a címben a legkisebb maximum módszere. A lineáris programozási feladat duálja módosított normál feladat, és így pl. szimplex módszerrel is megoldhatjuk.

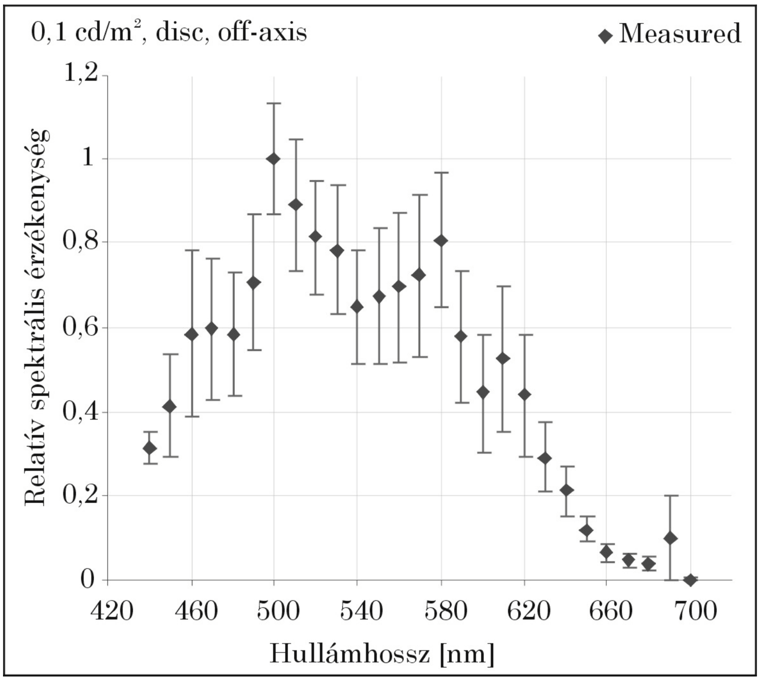
Végül megvizsgáljuk lineáris függvény illesztését úgy, hogy az adott helyeken vett eltérések maximuma a legkisebb legyen. Ehhez igazoljuk CSEBISEV approximációs tételének (l. [3] 340. oldal, [5] 264. oldal) diszkrét változatát lineáris függvényekre. A tétel megadja az optimum szükséges és elégséges feltételét. A szükségességet a probléma geometriai megközelítésével, az elegendőséget a lineáris programozás elméletéből ismert ún. komplementaritási tétellel bizonyítjuk. Ezek alapján eljárást adunk a legjobban közelítő lineáris függvény (geometriai) meghatározására.

* BGF Pénzügyi és Számviteli Főiskolai Kar Zalaegerszegi Intézete, Módszertani Tanszéki Osztály, főiskolai docens.

2. EGY FÜGGVÉNYILLESZTÉSI FELADATHOZ VEZETŐ PROBLÉMA

Egy kísérlet során (l. [2]) azt vizsgálták, hogy a fény hullámhosszától hogyan függ az a fénysűrűség, amely már elvakítja az érzékelőt pl. éjszakai vezetés közben.

Különböző hullámhosszokon (420-tól 660-ig 10 nanométerenként) megmérték azt a fénysűrűséget, amelyet a tesztalany már zavarónak érzett. Minden kísérleti személy minden hullámhosszon legalább 10 mérést végzett. A kísérletben tízen vettek részt. Így hullámhosszonként minimum 100 mérés állt rendelkezésre (több esetben ez a szám 300 – 400 is lehetett, mert a kísérletet több menetben hajtották végre, és a már mért hullámhosszakat ismét bevették a vizsgálandók közé). Az így kapott értékek alapján minden vizsgált hullámhosszon kiszámították az ún. relatív spektrális érzékenység átlagát, valamint meghatározták a 0,95 megbízhatósági szinthez tartozó konfidencia intervallumokat. A kapott eredményeket az *ábra* mutatja.



Feladatunk, hogy a hullámhossz függvényében lehetőleg egyszerű formulával, pl. polinommal adjuk meg a függvényértéket.

Ha a 27 alappontban számított átlagos értékekre illesztünk polinomot, az ún. LAGRANGE-féle interpolációs polinomot, akkor ennek a legfeljebb 26-od fokú polinomnak akár 25 szélsőértéke is lehet. Ez az ingadozás valószínűleg nem tükrözi az érzékenységi görbe menetét. Ezért célszerű alacsonyabb fokszámú polinomot illeszteni. Ha a legkisebb négyzetek módszerével keresünk közelítő polinomot, előfordulhat, hogy egyes hullámhosszoknál a konfidencia intervallumon kívülre kerül a polinom értéke.

Keressünk tehát olyan 26-odfokúnál alacsonyabb fokszámú polinomot, amelynek értéke az adott hullámhosszoknál a megfelelő konfidencia intervallumon belülre esik feltéve, hogy van ilyen polinom. A polinom létezése általában nincs biztosítva, emiatt a konfidencia intervallumok hosszát szorozzuk egy $\mu \geq 0$ számmal, majd keressük μ minimumát.

3. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI MODELL

Vizsgáljuk meg a problémát általánosan. Legyen adva az [*a*, *b*] intervallumon értelmezett *f* valós függvény értéke az $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ $\left(n \in \mathbf{N},\, a \le x_0,\, x_n \le b\right)$ pontokban:

$$f_i = f\left(x_i\right) \qquad \left(i = 0,1,\ldots,n\right),$$

és legyenek adva az $r_i > 0$ számok minden $i = 0,1,\ldots,n$ -re.

Közelítsük az *f* függvényt a φ_1, φ_2 ..., φ_m ($m \in \mathbf{N}^+$) [*a*, *b*]-n értelmezett függvények olyan

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_m\varphi_m \quad \left(c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}\right)$$

lineáris kombinációjával, amelyre

$$\varphi\left(x_i\right) \in \left[\, f_i - r_i,\, f_i + r_i \,\right]$$

minden $i = 0,1,\ldots,n$ -re feltéve, hogy ez lehetséges. Általában azonban ilyen φ függvény létezése nincs biztosítva. Ezért az intervallumok hosszát szorozzuk egy $\mu \ge 0$ számmal, majd keressük $c_1, c_2, \ldots, c_m$ és μ olyan értékét, amelyre μ minimális. Ha μ minimuma nem nagyobb 1-nél, akkor a kívánt tulajdonságú φ függvényt kapjuk. Ha μ minimuma nagyobb 1-nél, akkor a kívánt tulajdonságú φ függvény nem létezik, de $\varphi_1, \varphi_2 \ldots, \varphi_m$ lineáris kombinációi közül a legjobbhoz jutunk.

A lineáris programozási modell felírásához vezessük be a

$$\varphi_{ij} = \varphi_j\left(x_i\right) \qquad \left(i = 0,1,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots m\right)$$

jelölést. A modell változói legyenek a $c_1, c_2, \ldots, c_m$ előjelkorlát nélküli és a μ nem negatív változók. A feltételek és célfüggvény a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{array}{c} \varphi_{i1}c_1 + \varphi_{i2}c_2 + \ldots + \varphi_{im}c_m + r_i\mu \ge f_i \quad \left(i = 0,1,\ldots n\right) \\ \varphi_{i1}c_1 + \varphi_{i2}c_2 + \ldots + \varphi_{im}c_m - r_i\mu \le f_i \quad \left(i = 0,1,\ldots n\right) \\ c_1,\, c_2, \ldots,\, c_m \in \mathbf{R}, \quad \mu \ge 0 \\ \hline \mu \to \min \end{array}$$

A feladatnak nyilvánvalóan van lehetséges megoldása, és célfüggvénye alulról korlátos, azért létezik optimális megoldás.

A modell korlátozó feltételei a

$$\frac{1}{r_i}\left| f_i - \left(\varphi_{i1}c_1 + \varphi_{i2}c_2 + \ldots + \varphi_{im}c_m\right)\right| \le \mu \quad \left(i = 0,1,\ldots n\right)$$

feltételekkel is megadhatók, ami azt jelenti, hogy az optimális megoldáshoz tartozó φ függvénynek az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ helyeken az *f* függvény értékeitől mért, és $1/r_0, 1/r_1, \ldots, 1/r_n$ értékekkel súlyozott eltéréseinek maximuma a legkisebb. Ha $r_0 = r_1 = \ldots = r_n$, akkor az optimális megoldás meghatározását a *legkisebb maximum módszerének* nevezhetjük.

Az előjelkorlát nélküli változókhoz tartozó duál feltételek egyenletek, így a duál feladat a

$$\begin{array}{l} \varphi_{0j}u_0+\varphi_{1j}u_1+\ldots+\varphi_{nj}u_n-\varphi_{0j}v_0-\varphi_{1j}v_1-\ldots-\varphi_{nj}v_n=0 \quad (j=1,2,\ldots m) \\ r_0u_0+r_1u_1+\ldots+r_nu_n+r_0v_0+r_1v_1+\ldots+r_nv_n\le 1 \\ u_0,u_1,\ldots,u_n,v_0,v_1,\ldots,v_n\ge 0 \\ \hline f_0u_0+f_1u_1+\ldots+f_nu_n-f_0v_0-f_1v_1-\ldots-f_nv_n\to \max \end{array}$$

módosított normál feladat.

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$\varphi_j(x)=x^{j-1} \quad (j=1,2,\ldots,m),$$

és így a φ polinom fokszáma legfeljebb $m-1$. Ekkor $n<m$ esetén μ minimális értéke 0, hiszen a LAGRANGE-féle interpolációs polinom értékei az alappontokban megegyeznek az f függvény értékeivel. Elegendő tehát az $n\ge m$ esettel foglalkozni.

4. LINEÁRIS FÜGGVÉNY ILLESZTÉSE A LEGKISEBB MAXIMUM MÓDSZERÉVEL

Legyen a korábbi jelölések mellett $m=2$, $n\ge 2$, $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=x$, és $r_0=r_1=\ldots=r_n=1$. Ekkor az illesztési feladat lineáris programozási modellje:

$$\begin{array}{l} c_1+x_0c_2+\mu\ge f_0 \\ c_1+x_1c_2+\mu\ge f_1 \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ c_1+x_nc_2+\mu\ge f_n \\ c_1+x_0c_2-\mu\le f_0 \\ c_1+x_1c_2-\mu\le f_1 \\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \\ c_1+x_nc_2-\mu\le f_n \\ c_1,c_2\in\mathbf{R},\ \mu\ge 0 \\ \hline \mu\to\min, \end{array}$$

duálja:

$$\begin{array}{l} u_0+u_1+\ldots+u_n-v_0-v_1-\ldots-v_n=0 \\ x_0u_0+x_1u_1+\ldots+x_nu_n-x_0v_0-x_1v_1-\ldots-x_nv_n=0 \\ u_0+u_1+\ldots+u_n+v_0+v_1+\ldots+v_n\le 1 \\ u_0,u_1,\ldots,u_n,v_0,v_1,\ldots,v_n\ge 0 \\ \hline f_0u_0+f_1u_1+\ldots+f_nu_n-f_0v_0-f_1v_1-\ldots-f_nv_n\to\max \end{array}$$

A feladat geometriai jelentése a következő. Adottak a síkbeli koordináta rendszerben a $P_0(x_0,f_0)$, $P_1(x_1,f_1)$, ..., $P_n(x_n,f_n)$ pontok $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$. Keressük azokat a $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ értékeket, illetve az általuk meghatározott $y=c_2x+c_1$ egyenletű e egyenest, és azt a $\mu\ge 0$ értékeket, melyekre, minden P_i pont az $y=c_2x+c_1-\mu$ és az $y=c_2x+c_1+\mu$ egyenletű e_1 és e_2 közé esnek, továbbá μ minimális.

Ha $P_0, P_1, \ldots, P_n$ egy egyenesre esnek, akkor μ minimális értéke 0, a keresett *e* egyenes az adott pontok egyenese.

Tegyük fel ezután, hogy $P_0, P_1, \ldots, P_n$ nem esnek egy egyenesre. Jelöljük a pontok konvex burkát *K*-val. Nyilvánvaló, hogy az e_1 és az e_2 egyenesek párhuzamos támasz-egyenesei *K*-nak, vagyis az adott pontok e_1 és e_2 közé esnek úgy, hogy közülük legalább egy-egy pont illeszkedik a két egyenesre. Világos, hogy *K* két olyan párhuzamos támaszegyenesét kell megtalálni, amelyeket a legrövidebb *y* tengely irányú eltolás visz egymásba. Most megadjuk ennek szükséges és elégséges feltételét. Tételünk tulajdonképpen a Csebisev-féle approximációs tétel diszkrét változata lineáris függvényekre.

Tétel. A nem egy egyenesre eső $P_0\left(x_0, f_0\right), P_1\left(x_1, f_1\right), \ldots, P_n\left(x_n, f_n\right)$ pontok *K* konvex burkának két párhuzamos támaszegyenesét akkor és csak akkor viszi át egymásba a legrövidebb *y* tengely irányú eltolás, ha van a pontok között olyan P_i, P_k, amelyik az egyik és olyan P_j, amelyik a másik támaszegyenesre illeszkedik, és $x_i < x_j < x_k$.

Bizonyítás. Elegendőség. Tegyük fel, hogy léteznek a mondott tulajdonságú P_i, P_k és P_j pontok. Ha P_i, P_k a felső, P_j az alsó támaszegyenesen van, akkor behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

$$u_l = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x_k - x_j}{x_k - x_i}, & \text{ha} \quad l = i \\[2ex] \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x_i - x_j}{x_i - x_k}, & \text{ha} \quad l = k \\[2ex] 0, & \text{különben} \end{cases} \qquad v_l = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad l = j \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

a duál feladat lehetséges megoldása (az $x_i < x_j < x_k$ feltétel a nemnegativitást biztosítja). A támaszegyenesek egyenlete alapján számított c_1, c_2 és μ értékek a primál feladat lehetséges megoldását adják. Figyelembe véve, hogy P_i, P_k és P_j melyik támaszegyenesre illeszkedik, a komplementaritási tétel alapján kapjuk, hogy optimális megoldásokhoz jutottunk.

Ha P_i, P_k, az alsó P_j a felső támaszegyenesen van, akkor az elegendőség hasonlóan igazolható, ha az u_l és v_l változók értékei felcseréljük.

Szükségesség. Indirekt módon tegyük fel, hogy a két párhuzamos támaszegyenesen nincs a mondott tulajdonságú P_i, P_k és P_j pont. Ekkor van olyan P_i és P_j, melyekre x_i az adott pontok közül az egyik egyenesre illeszkedők abszcisszáinak maximuma, x_j az adott pontok közül a másik egyenesre illeszkedők abszcisszáinak minimuma, és $x_i < x_j$.

Ha P_i, a felső, P_j az alsó támaszegyenesen van, akkor P_i és P_j körül a rájuk illeszkedő támaszegyeneseket elég kicsi, de ugyanakkora szöggel elforgathatjuk negatív irányban úgy, hogy ismét párhuzamos támaszegyeneseket kapjunk, de ezeket már rövidebb *y* tengely irányú eltolás viszi át egymásba.

Ha P_i, az alsó, P_j a felső támaszegyenesen van akkor pozitív irányú forgatással csökkenthetjük az eltolás hosszát.

Így a kiindulási helyzethez nem tartozhatott a legrövidebb eltolás.

Ezzel a tételt bizonyítottuk

Figyeljük meg, hogy a tétel alapján algoritmust adhatunk az optimális megoldás meghatározására:

1. Induljunk ki *K* egy oldal egyeneséből, és határozzuk meg a vele párhuzamos támaszegyenest.
2. A tétel feltétele alapján döntsük el, hogy a legrövidebb *y* tengely irányú eltolás viszi-e át őket egymásba. Ha nem, a 3., ha igen, 4. lépés következik.
3. A szükségesség igazolásánál leírt forgatással csökkentsük az eltolás mértékét. A forgatáshoz olyan szöget válasszunk, hogy az egyik támaszegyenes *K* egy újabb oldal egyenesébe menjen át, amelyre az 1. lépésnél folytatjuk az eljárást.
4. A kapott támaszegyenesek távolságát felező párhuzamos a feladat optimális megoldását szolgáltatja.

Az eljárás véges, mert *K*-nak véges sok oldala van, és minden lépésben a korábbiaktól különböző oldal egyenesét kapjuk, mivel a támaszegyeneseket egymásba vivő *y* tengely irányú eltolás mértéke csökken.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] J. N. BRONSTEJN, K. A SZEMANGYEJEV, G. MOSIOL, H. MÜHLIG: Matematikai kézikönyv. TypoTEX Kiadó Budapest 2000.
[2] J. FEKETE, G. VÁRADY, C. SIK-LÁNYI, J. SCHANDA: Optimizing spectral power distribution of car headlamp lighting, Proc. 26th Session of the CIE, Beijing, China (2007) D1 56-59.
[3] KIS O., KOVÁCS M.: Numerikus módszerek. Műszaki Könyvkiadó 1973.
[4] MÓRICZ F.: Numerikus módszerek az algebrában és az analízisben. Polygon Szeged, 1997
[5] STOYAN G., TAKÓ G.: Numerikus módszerek: elmélet – gyakorlat – szoftver I. ELTE – Typo TEX. 1993.